FER – Matematika 1

Pripreme za 3. međuispit

Ekstremi

1. U kružnicu polumjera r upisan je pravokutnik maksimalne površine. Odrediti dimenzije pravokutnika i iznos površine.

2. Odrediti duljine stranice pravokutnika upisanog u elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ najveće površine.

3. Odrediti duljine stranica trokuta maksimalne površine upisanog u elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

4. U lik omeđen krivuljama $y = x^2$, $y = 1$ upisati pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima tako da mu je ploština maksimalna. Koliko iznosi ta ploština?

5. Lik je omeđen parabolom $y^2 = 2px$ i pravcem $x = a$. Odrediti dimenzije pravokutnika maksimalne površine upisanog u taj lik.

6. Od pravokutnika dimenzija 20×30 cm napraviti otvorenu kutiju tako da njen volumen bude maksimalan. Koliki je taj volumen?

7. Od lima oblika kvadrata stranice a napraviti otvorenu kutiju maksimalnog obujma.

8. U kružnicu polumjera r upisan je trapez čija je dulja osnovica promjer kružnice, tako da mu je:
   (a) opseg maksimalan. Koliki je taj opseg?
   (b) ploština maksimalna. Koliko iznosi ta ploština?

9. Naći točku P na krivulji $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ u kojoj će tangenta na krivulju imati najkraći odječak između koordinatnih osi.

10. Jedan brid kvadra dvostruko je veći od drugog, a oplošje kvadra iznosi 10 cm^2. Odredi najveći mogući volumen kvadra.

11. U elipsu $x^2 + 2y^2 = 2$ upiši pravokutni trokut maksimalne površine, uz uvjet da su katete trokuta paralelne koordinatnim osima. Dokaži da se radi o maksimumu.

12. Nađite pravokutnik maksimalne ploštine čija jedna stranica leži na osi Ox, a preostala dva vrha nalaze na krivulji $y = \sqrt{4 - x^2}$. Izračunajte ploštinu tog pravokutnika.

13. U kružnicu polumjera R upisan je jednakokračni trapez čija je dulja osnovica promjer kružnice i čija je površina maksimalna. Koliko iznosi ta površina? Dokažite da se radi o maksimumu!

14. Koliko je minimalno oplošje valjka (bez gornje baze) ako mu je obujam 8π?

15. Odredi trapez maksimalne površine čija dva vrha su u točkama $(2, 0)$ i $(-2, 0)$ a preostala dva leže na krivulji $y = 4 - x^2$, $y > 0$.

16. Oplošje uspravnog valjka iznosi 2π m^2. Odredite polumjer baze tako da volumen tog valjka bude maksimalan.

17. Volumen uspravnog valjka iznosi 8π m^3. Odredite polumjer baze tako da oplošje tog valjka bude minimalno.

18. Dvije stranice pravokutnika leže na koordinatnim osima, a jedan mu vrh leži na paraboli $x + y^2 = 4$, u prvom kvadrantu i izabran je tako da površina pravokutnika bude maksimalna. Izračunajte površinu tog pravokutnika.

19. Dvije stranice pravokutnika leže na koordinatnim osima, a jedan mu vrh leži na paraboli $x^2 + y = 9$, u prvom kvadrantu i izabran je tako da površina pravokutnika bude maksimalna. Izračunajte površinu tog pravokutnika.

20. Odredi pravokutnik maksimalne površine čija dva vrha leže na segmentu $[-3, 3]$ x-osi, a preostala dva na paraboli $y = 9 - x^2$.

21. Iz kruga polumjera r izreži kružni isječak takav da se njegovim savijanjem može dobiti stožac maksimalnog volumena.

22. Odredi dimenzije uspravnog kružnog valjka upisanog u stožac visine h polumjera r tako da
   (a) valjak bude maksimalnog obujma;
   (b) valjak bude maksimalnog oplošja.

23. Odredi dimenzije stošca upisanog u sferu polumjera r tako da bude
   (a) maksimalnog volumena
   (b) maksimalnog oplošja.

24. Odredi dimenzije kvadratne prizme upisane u stožac tako da joj baza leži u bazi stošca, ako želimo da je prizma
   (a) maksimalnog volumena;
   (b) maksimalnog oplošja.

25. Odrediti dimenzije stošca opisanog oko sfere tako da bude
   (a) minimalnog oplošja;
   (b) minimalnog volumena.

26. Odrediti dimenzije valjka upisanog u sferu polumjera r tako da bude
   (a) maksimalnog obujma;
   (b) maksimalnog oplošja.

27. Odredi koordinate točke $T(x_0, y_0)$ elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ takve da tangenta u točki T s koordinantim osima zatvara trokut minimalne površine.

28. Odredi točku na paraboli $y = x^2$ koja je najmanje udaljena od pravca $2x - y - 4 = 0$.

Skiciranje grafa funkcije

1. $y = x^3\sqrt{1-x^2}$
2. $y = \dfrac{1}{e^{2x} - 2e^x + 2}$
3. $y = \ln(2e^x - 1)$
4. $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$
5. $y = (x+2)e^{1/x}$
6. $y = x + \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$
7. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$
8. $y = e^{-x^2}$
9. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$
10. $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$
11. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
12. $y = e^{\frac{x^2}{1-x}}$
13. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$
14. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
15. $y = e^{-1/x}$
16. $y = e^{\frac{1}{x-1}}$
17. $y = \dfrac{x^2}{4-x}$
18. $y = \dfrac{(x+2)^2}{x}$
19. $y = \dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$
20. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
21. $y = \dfrac{x^2}{1-x^3}$
22. $y = xe^{-x}$
23. $y = x^2e^{-x}$
24. $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$
25. $y = x\operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$
26. $y = \arccos(\frac{1}{x})$

Integriranje metodom supstitucijom

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x + 4x\ln x}$
4. Naći a takav da $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x = 4$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x - \ln^3 x)}$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arctg}^3 x)}$
7. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x}+1}$
10. $\displaystyle\int_0^2 x^3\cdot\sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \sqrt{e^x+3}\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Integriranje metodom parcijalne integracije

1. $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^2 x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int (x^2+2x+3)\cos x\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int (3x-2)e^x\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(3x-2)\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_1^e (3-2x)\ln x\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_0^1 x^2\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x-1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

Integriranje racionalnih funkcija

1. $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3-x^2+4x-4}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{x^{10}-2x^5+5}$
4. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$
6. $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

10. $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

11. $\int \frac{2x^2+3}{x^3-3x^2+3x}\,\mathrm{d}x$

12. $\int \frac{x^2+4x}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$

Integriranje iracionalnih funkcija

1. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{3/2} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Integriranje trigonometrijskih funkcija

1. $\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{1+8\cos^2 x}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$; $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$
3. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\pi/4} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \cos^4 5x \sin^3 5x\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$
7. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+3}\,\mathrm{d}x$
9. $\int \frac{6\sin x}{\cos^2 x+3}\,\mathrm{d}x$
10. $\int \frac{1}{\cos^4 x-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$

Nepravi integrali i slč.

1. Dokaži konv. nepravog integrala $\int_1^{+\infty} \cos x \cdot 3^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Ispitaj konv. integrala $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$
3. Izračunaj $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$
4. Izračunati $\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Primjena integrala

1. Odredi parametar a tako da površina lika omeđenog krivuljom $y=ax^2$ i pravcem $y=1$ iznosi 1.
2. Pomoću integralnog računa dokaži da je volumen kugle polumjera R jednak $\frac{4}{3}R^3\pi$.
3. Zadan je lik P omeđen krivuljama $y=e^x$, $y=e^{-x}+2$ i osi Oy. Skicirajte lik P i izračunajte njegovu ploštinu.
4. Zadan je lik P omeđen krivuljama $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x-1}$ i osi Ox. Skicirajte lik P i izračunajte njegovu ploštinu.
5. Izračunati pološtinu lika omeđenog s krivuljama $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{3-x}$ i osi Ox. Nacrtati sliku!
6. Izračunati obujam (volumen) tijela koje nastaje vrtnjom oko osi Ox lika omeđenog s pravcima $y=0$, $y=\sqrt{2}$ te krivuljom $x^2-y^2=1$, $x,y,>0$.
7. Naći ploštinu lika kojeg u prvom kvadrantu omeđuju krivulje $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ i pravac $y=2$.
8. Naći ploštinu omeđenu krivuljama $y=\frac{1}{x^2+1}$ i $y=\frac{1}{2}x^2$.
9. Naći ploštinu omeđenu krivuljama $y=\ln x$, $y=\ln(4-x)$ i osi x.